МЕХАНИКА

Лектор: Жақыпов Әлібек Серікұлы
Тел: +7 705 660 69 63
e-mail: Alibek.Zhakypov@kaznu.edu.kz

5 лекция
«Механическая энергия. Работа и мощность силы»

Цель лекции: сформировать у студентов понимание понятий работы, мощности, кинетической и потенциальной энергии, их взаимосвязи через теорему о работе и изменении энергии, а также особенностей распределения кинетической энергии в системе материальных точек и вращающемся теле.

Задачи лекции:

1. Ввести определение работы силы и мощности, показать их геометрический смысл и связь с движением тела.
2. Вывести выражение для кинетической энергии материальной точки и установить связь между работой силы и изменением кинетической энергии.
3. Сформулировать и проиллюстрировать теорему Кёнига для механической системы, а также выражения для кинетической энергии вращающегося тела.
4. Ввести понятие потенциальной энергии, показать ее связь с консервативными силами и градиентом потенциальной энергии.
5. Рассмотреть примеры потенциальной энергии в однородном поле и при упругой деформации тела.

Основные понятия и термины:

Работа силы – скалярная величина, численно равная произведению проекции силы на направление перемещения точки приложения силы на модуль этого перемещения.

Мощность – Физическая величина, характеризующая быстроту совершения работы.

Теорема Кёнига — для системы материальных точек теорема Кёнига утверждает, что полная кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии движения относительно центра масс и кинетической энергии поступательного движения центра масс.

Консервативные силы – примеры консервативных сил силы тяготения и упругости; соответствующие потенциальные энергии выводятся для однородного поля и для упруго деформированного тела по закону Гука.

План лекции

1 Понятие работы силы. Элементарная работа, интегральное выражение полной работы. Геометрический смысл работы.

2 Мощность силы. Определение мощности, выражение через силу и скорость.

3 Кинетическая энергия материальной точки. Теорема о работе и приращении кинетической энергии.

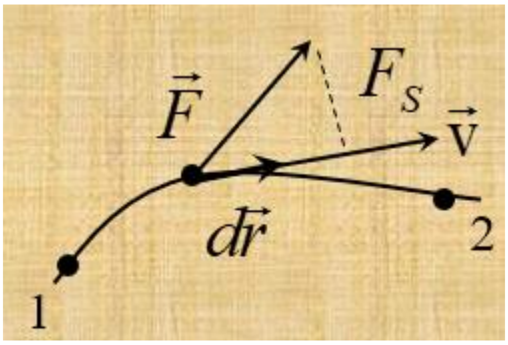
4 Кинетическая энергия системы материальных точек. Теорема Кёнига. Кинетическая энергия вращающегося тела, выражения через момент инерции и угловую скорость.

5 Потенциальная энергия. Связь силы и градиента потенциальной энергии, консервативные и неконсервативные силы.

6 Примеры потенциальной энергии однородное поле, упруго деформированное тело (закон Гука).

«Механическая энергия. Работа и мощность силы»

Если тело движется прямолинейно и на него действует постоянная сила **F** под углом **a**, то работа этой силы **A** равна произведению проекции силы на перемещение точки приложения силы.



$$dA = F_s \cdot dS = F \cdot dS \cdot cos\alpha = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (5.1)$$

Т.к $dS = |d\vec{r}|$

Элементарная работа (скаляр)

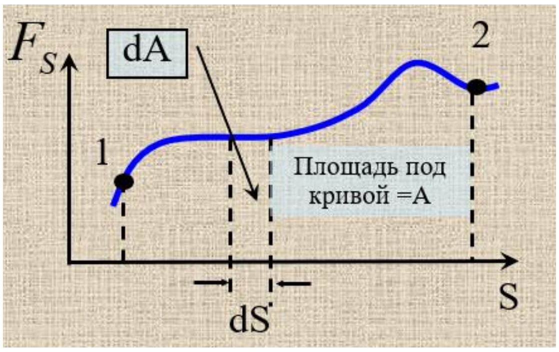
$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (5.2)$$

Для нахождения полной работы необходимо вычислить интеграл:

$$A = \int_2^1 F \cdot cos\alpha dS = \int_1^2 F_s dS \qquad (5.3)$$

[A]=1 Джоуль = 1Н 1м

Геометрический смысл работы:



При $\alpha < \frac{\pi}{2}$ $A > 0(cos\alpha > 0)$

$\alpha > \frac{\pi}{2}$ $A < 0$ $(cos\alpha < 0)$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}\ A = 0\ F \perp S$$

Для характеристики работы, совершаемой силой за единицу времени, вводят понятие мощности.

<u>Мощность силы</u> – это отношение элементарной работы силы за малый промежуток времени к его длительности:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{5.4}$$

Скалярное произведение

<u>Кинетическая энергия</u>

Рассмотрим движение материальной точки под действием силы F. Уравнение движения имеет следующий вид:

$$m \cdot \vec{v}' = \vec{F} \tag{5.5}$$

Умножим его скалярно на dS:

$$m \cdot \vec{v}' \cdot d\vec{S} = \vec{F} d\vec{S} \quad d\vec{S} = \vec{v} \cdot dt$$

Тогда:

$$m \cdot \vec{v}' \cdot \vec{v} \cdot dt = \vec{F} d\vec{S} \qquad \left\{ \vec{v}' = \frac{d\vec{v}}{dt} \to \vec{v}' \cdot dt = d\vec{v} \right\}$$

$$m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{F} d\vec{S}$$

Занесем m и v под дифференциал:

$$d\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right) = \vec{F} d\vec{S} = dA$$

Обозначим

$$\frac{mv^2}{2} = E_k$$

Тогда:

$dE_k = dA$

Либо:

$$\int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S} \to \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{12} \tag{5.6}$$

Тело, имеющее массу и движущееся со скоростью **V,** обладает кинетической энергией:

$$E_k = {}^{mv^2}/_2 \tag{5.7}$$

Работа силы, действующей на тело, идет на приращение кинетической энергии этого тела.

Кинетическая энергия – это энергия механического движения.

В разных инерциальных системах отсчета скорость тела разная, следовательно кинетическая энергия разная. Она зависит от выбора системы отсчета.

В случае n – материальных точек:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} \tag{5.8}$$

Приведем без вывода теорему Кёнига:

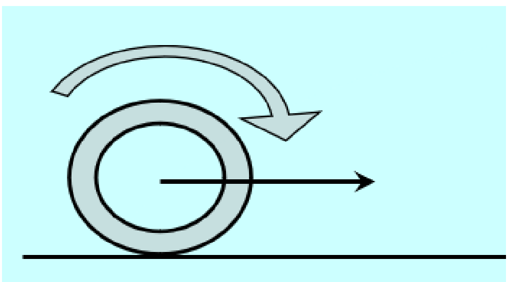
Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии той же системы при ее движении относительно системы центра масс и кинетической энергии, которую имела бы система, двигаясь поступательно со скоростью ее центра масс.

$$E_k = E_k' + \frac{mv_{\text{ц.м.}}^2}{2} \tag{5.9}$$

E_k - Полная кинетическая энергия

E_k' - Кинет.эн. движения относит. центра масс

$\frac{mv_{\text{ц.м.}}^2}{2}$ - Кинет. эн. поступат. движения центра масс



Пример – колесо. Для него имеем:

$$E_k = E_{\text{Вращат.}} + E_{\text{Поступат.}} \tag{5.10}$$

<u>Найдем кинетическую энергию вращающегося тела</u>

$$dE_k = \frac{dmv^2}{2} = \frac{1}{2} dm \cdot \omega^2 \cdot R^2$$

так как:

$$\{v = \omega R\}$$

$$dE_k = \frac{1}{2}\omega^2 R^2 dm \to E_k = \frac{1}{2}\omega^2 \int\limits_M R^2 dm = \frac{J\omega^2}{2}$$

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}$$

кинетическая энергия для вращающегося тела при неподвижной оси.

По т. Кёнига при движении и вращении:

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv_{\text{ц.м}}^2}{2}9 \tag{5.11}$$

Полная кинетическая энергия вращающегося и двигающегося тела (колесо, катящееся по дороге).

Найдем еще одно выражение для кинетической энергии вращающегося тела при неподвижной оси

$$dE_k = \frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v} \cdot dm = \frac{1}{2}\vec{v} \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}] \cdot dm = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot [\vec{r} \times \vec{v}] \cdot dm$$

$$E_k = \int\limits_M \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot [\vec{r} \times \vec{v}] \cdot dm = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \int\limits_M [\vec{r} \times \vec{v}] \cdot dm = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L} \Leftrightarrow E_k = \frac{1}{2}J \cdot \vec{\omega}^2 \Rightarrow \vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$$

Потенциальная энергия

Механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением, называется <u>потенциальной энергией.</u>

$$dA = -dE_{\text{потенц.}} \Rightarrow A_{1-2} = E_{n.1} - E_{n.2}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_{n.} \Rightarrow E_{n.} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} + const$$

Потенциальная энергия определяется с точностью до константы, однако нас это не сильно волнует, так как в выражения потенциальная энергия чаще всего входит в виде разности или производной.

Поэтому потенциальную энергию в каком-то месте можно принимать равной нулю.

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_n = -\left[\frac{\partial E_n}{\partial x} d + \frac{\partial E_n}{\partial x} dy + \frac{\partial E_n}{\partial x} dz\right] \qquad \text{или}$$

$$\vec{F} = -\left[\frac{\partial E_n}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_n}{\partial x}\vec{\jmath} + \frac{\partial E_n}{\partial x}\vec{k}\right] \qquad \text{- Градиент функции } E_{\text{п}}$$

$\vec{F} = -grad(E_n)$ Либо , что тоже самое: $\vec{F} = -\nabla(E_n)$

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ - оператор набла

Консервативной (потенциальной) называют силу, работа которой определяется только начальными и конечными положениями тела и не зависит от формы пути. **Консервативными** силами являются силы тяготения, упругости, и т. д. Все центральные силы консервативны. Пример неконсервативных сил являются силы трения.

Далее, для выяснения вида потенциальной энергии в каждом конкретном случае рассмотрим примеры:

Потенциальная энергия материальной точки в однородном поле

Опр. Поле называется однородным, если сила F, действующая на материальную точку со стороны поля, одинакова во всех точках этого поля. Однородное поле – потенциально (работа не зависит от траектории).

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx \qquad dE_n = -dA = -F_x dx$$

Проинтегрируем это выражение:

$$E_n(x) - E_n(0) = -\int_0^X F_X dx = -F_X \cdot x$$ Получаем:

$$E_n(x) = -F_x \cdot x + E_n(0)$$

Примем: $F = -mg$; $E_n(0) = 0$; $x = h$

$$E_n(x) = -(-mg) \cdot x = mgh$$

Пример №2: Потенциальная энергия упруго деформированного тела

Закон Гука для упруго деформированного тела гласит:

$\vec{F} = -kx \cdot \vec{i}$ тогда $dE_n = -dA = -F_X dx = kx \cdot dx$

$$E_n(X) = k\int_0^X x d\,x = \frac{kX^2}{2} \Longrightarrow E_n(X) = \frac{kX^2}{2}$$

Контрольные вопросы

1. Дай определение работы силы при прямолинейном движении и запиши интегральное выражение работы при переменном силовом воздействии.
2. Что называется мощностью силы как она выражается через работу и как через силу и скорость
3. Запиши формулу для кинетической энергии материальной точки и сформулируй теорему о связи работы силы с изменением кинетической энергии.
4. Сформулируй теорему Кёнига для кинетической энергии системы материальных точек и поясни физический смысл входящих в нее слагаемых.

5. Что такое потенциальная энергия как она связана с консервативными силами приведи примеры потенциальной энергии в однородном поле и при упругой деформации тела.

Литература

1. Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Высш. шк., 1990.- 478 с.

2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики М.: Высш. шк., 1989.- 608 с.

3. Савельев И.В. Общий курс физики. Т1. Механика. Молекулярная физика. М.: Наука, 1988.- 416 с.

4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики.- М.: Наука, 1985.

5. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Т.1,2,3.-М.: Наука, 1974,1980

6. Сивухин Д.В. Курс общей Физики. – М.: Наука, 1986. Т. 1.